

## การออกแบบการควบคุมเชิงทำนายแบบจำลองกับหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อ Design of a Model Predictive Control for a Two-Wheeled Self-Balancing Robot

อิทธิเดช มุลมั่งมี<sup>1\*</sup>, พงศกร กวีสุนทรเสนาะ<sup>2</sup> และ วิฑิต ฉัตรรัตนกุลชัย<sup>2</sup>

<sup>1</sup>สาขาวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช บางเขน กรุงเทพฯ 10900

<sup>2</sup>ห้องปฏิบัติการควบคุมหุ่นยนต์และการสั่นสะเทือน (CRV Lab) ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ บางเขน กรุงเทพฯ 10900

\*ติดต่อ: profittidej@gmail.com, โทรศัพท์ 08-6579-4040

### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอ การออกแบบตัวควบคุมสำหรับการรักษาสถานะ (stabilization) ของหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อ (Two-wheeled Self-Balancing Robot) ด้วยวิธีการควบคุมเชิงทำนายแบบจำลอง (model predictive control; MPC) ระบบหุ่นยนต์สองล้อถูกจัดอยู่ในประเภท ระบบที่มีจำนวนตัวควบคุมน้อยกว่าองศาอิสระการเคลื่อนที่ (Underactuated Mechanical Systems; UMS) และด้วยการออกแบบด้านโครงสร้าง จึงทำเป็นระบบที่มีเสถียรภาพอย่างมีขอบเขต (marginal stable), เป็นระบบไม่เชิงเส้น (nonlinear system), มีสมบัติเฟสไม่ต่ำที่สุด (non-minimum phase) และมีหลายอินพุตหลายเอาต์พุต (MIMO) ซึ่งยากต่อการออกแบบตัวควบคุม แบบจำลองของหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อนี้ ประกอบด้วยสองส่วนคือ ส่วนแรกเป็นพลวัตของหุ่นยนต์ ซึ่งจำลองโดยอาศัยสมการการเคลื่อนที่ของ EL ส่วนที่สองเป็นแบบจำลองระบบขับเคลื่อนด้วยมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงเพื่อป้อนแรงเคลื่อนไฟฟ้า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งระบบถูกทำให้เป็นเชิงเส้นสำหรับการออกแบบตัวควบคุม การควบคุมแบบป้อนกลับตัวแปรเสถียรของตัวควบคุม MPC อาศัยการซีกตัวอย่าง (sampling) ของสัญญาณควบคุมแต่ละครั้ง เพื่อการทำนายเอาต์พุตของระบบไปในอนาคตตลอดช่วงเวลาทำนาย (prediction horizon) โดยคำนวณมุมที่ล้อสำหรับการทรงตัวของหุ่นยนต์ในแนวตั้งขึ้น ขณะที่แรงเคลื่อนไฟฟ้าที่ใช้ไม่เกินขนาดของมอเตอร์ สมรรถนะของตัวควบคุม MPC นำไปเปรียบเทียบกับตัวควบคุม LQR โดยการจำลองผลทางคอมพิวเตอร์แสดงให้เห็นว่า ตัวควบคุมทั้งสองสามารถติดตามสัญญาณอ้างอิงได้ดี นอกจากนั้นตัวควบคุม MPC ยังสามารถควบคุมการทำงานของมอเตอร์ให้อยู่ภายใต้เงื่อนไขจำกัดของอินพุตของระบบที่  $\pm 5$  โวลต์ได้ดีกว่าตัวควบคุม LQR ในขณะที่รักษาให้เอาต์พุต (มุมพิทช์) ของระบบมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน  $\pm 0.01$  rad.

**คำหลัก:** การควบคุมเชิงทำนายแบบจำลอง; หุ่นยนต์สองล้อ; การควบคุมแบบรักษาสถานะ; ระบบที่มีจำนวนตัวควบคุมน้อยกว่าองศาอิสระการเคลื่อนที่

### Abstract

In this article, a linear model predictive control (MPC) approach is used to design a controller for stabilizing a two-wheeled self-balancing robot. It is classified in a class of under-actuated mechanical systems (UMS). It has fewer controls than the number of degrees of freedom (DOF). Moreover, by the nature of its system structure that has marginal stability, nonlinearity, non-minimum phase, and multi-input-multi-output (MIMO), then it is difficult for a controller design. The robot model consists of two parts.

## DRC-20

The first part is the robot dynamics derived from the Euler-Lagrange (EL) equation of motion. The second part is a modeling of DC motor drive system to generate the voltage supply to the robot. The overall mathematical model is linearized for the controller design. The state-feedback MPC controller is proposed in this article. For each sampling time, a trajectory is assumed to be known over a prediction horizon. The MPC controller computes the steering angle in order to stabilize the two-wheel robot body at the upright position, while keeps the motor voltages under a limit. The performance of the proposed MPC is studied and compared with a Linear Quadratic Regulator (LQR). The simulation results demonstrate the good tracking performance of both controllers. Moreover, the MPC controller can be operated near a limit on system input of  $\pm 5$  volts, while keeps the system output (i.e., pitch angle) within the designed interval  $\pm 0.01$  rad.

**Keywords:** Model Predictive Control; Two-Wheeled Self-Balancing Robot; Stabilization; Underactuated Mechanical Systems

### 1. บทนำ

หุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อ (Two-Wheeled Self-Balancing Robot) จัดอยู่ในประเภทหุ่นยนต์เคลื่อนที่ (mobile robot) ที่นำไปใช้งานหลากหลาย ทั้งเป็นยานพาหนะในเมืองที่มีปัญหาการจราจรหรือที่จอดเป็นหุ่นยนต์บริการ (service robot) นอกจากนี้ยังถูกนำไปใช้ในงานสำรวจพื้นที่ที่มีความเสี่ยงสูง เนื่องจากความสามารถในการหมุนรอบตัวเองได้ ทำให้มีความคล่องตัวในการเคลื่อนที่สูง และใช้พื้นที่ไม่มากในการเคลื่อนที่ ทั้งยังสร้างมลภาวะต่ำ ซึ่งยานพาหนะสองล้อในปัจจุบัน อาทิ Nbot [2], JOE [8], Segway [11] ล้วนอาศัยหลักการทำงานของหุ่นยนต์สองล้อทั้งสิ้น

หุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อเป็นระบบทางกลที่มีความน่าสนใจทั้งในแง่ พฤติกรรมทางพลวัต และการควบคุม เนื่องจากเสถียรภาพของระบบหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อนี้เป็นเสถียรภาพอย่างมีขอบเขต (marginal stable) การควบคุมให้หุ่นยนต์มีเสถียรภาพและการตอบสนองของระบบอย่างมีประสิทธิภาพทำได้ยากเนื่องจากเป็นระบบไม่เชิงเส้น (nonlinear system), และมีสมบัติเฟสไม่ต่ำที่สุด (non-minimum phase) นอกจากนี้ยังเป็นระบบที่มีหลายอินพุตหลายเอาต์พุต (MIMO) ซึ่งยากต่อการออกแบบตัวควบคุมงานวิจัยในปัจจุบันเกี่ยวกับหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อ จึงมีทั้งการศึกษาพฤติกรรมของระบบและการควบคุม [5]

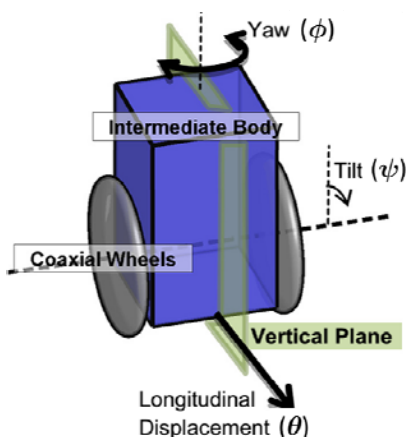
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับออกแบบการควบคุมหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อ แบ่งได้เป็น 2 กลุ่มคือ 1) ใช้สมการพลวัตอิงแบบจำลอง (model based on dynamic equation) อาทิ กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน (Newton's laws of motion), สมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์-ลากรอนจ์ (Euler-Lagrange (EL) equation of motion), และวิธีของเคน (Kane's method) โดยมีสมมติฐานคือระบบมีความแข็งเกร็ง (rigid body), ไม่เกิดการสั่นไถล, ไม่คิดผลความเสียดทาน เป็นต้น และ 2) ใช้แบบจำลอง Black-Box (black-box model) [1], [17] โดยวัดสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตของระบบ นำไปสร้างแบบจำลองที่เรียกว่า แบบจำลอง Black-Box เช่น ARX, ARMAX และ Output-error models ค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลองหาจากวิธีการ least-squares

การออกแบบระบบควบคุมหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อ มีทั้งการใช้ ตัวควบคุมเชิงเส้น (linear controller) เช่น การวางตำแหน่งโพล (pole placement) [7], [8], [13] ตัวควบคุมป้อนกลับตัวแปรสเกท LQR ซึ่งเป็นการควบคุมเหมาะสมที่สุด (optimal control) ที่นิยมใช้กันมาก [1], [4], [20] ขณะที่ตัวควบคุมแบบเกาส์เซียนกำลังสองเชิงเส้น (Linear Quadratic Gaussian; LQG) ใช้การป้อนกลับสัญญาณเอาต์พุตร่วมกับตัวสังเกตคาลมาน (Kalman observer) [16] และตัว

## DRC-20

ควบคุมที่ไม่อาศัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อีกชนิดที่นิยมใช้อย่างมากคือ ตัวควบคุมพีไอดี (PID controller) [14], [18] เมื่อเปรียบเทียบสมรรถนะของตัวควบคุมเชิงเส้นโดยการวางตำแหน่งโพลกับตัวควบคุม LQR พบว่าวิธีการวางตำแหน่งโพลให้ผลที่ดีกว่าตัวควบคุม LQR ในหลายๆ ด้าน เช่น settling time, การสั่นแกว่งที่น้อยกว่า [15] และผลด้านโอเวอร์ชูตที่น้อยกว่า [22] สำหรับตัวควบคุม PID จะให้ขอบเขตของเสถียรภาพมากกว่าวิธีการวางตำแหน่งโพล แต่ก็เกิดการสั่นแกว่งที่มากขึ้นตามมา [19]

ในส่วนของ การควบคุมไม่เชิงเส้น (nonlinear controller) ที่ใช้ในหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อ เช่น การใช้ตัวควบคุมฟัซซี่ (fuzzy controller) [15] และตัวควบคุมฟัซซี่แบบปรับค่าได้ (adaptive fuzzy controller) บนแบบจำลองของ Takagi–Sugeno Model [24] หรือใช้ตัวควบคุมแบบแผนเคลื่อนร่วมกับตัวควบคุมฟัซซี่ (sliding-fuzzy controller) [9], [10] ข้อดีของตัวควบคุมเหล่านี้คือ ไม่ต้องการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์ทั้งหมด และสามารถควบคุมสามารถทำงานครอบคลุมความไม่เชิงเส้นต่างๆ ที่ไม่สามารถหาแบบจำลองได้ สำหรับการควบคุมไม่เชิงเส้นที่ต้องอาศัยแบบจำลอง เช่น Control-Lyapunov Function [12] สามารถกำหนดขอบเขตของเสถียรภาพได้ และตัวควบคุม Backstepping [6] อย่างไรก็ตาม ข้อจำกัดของตัวควบคุมนี้คือ โครงสร้างของระบบต้องอยู่ในรูป strict feedback form



ภาพที่ 1 การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์สองล้อ [5]

บทความนี้นำเสนอการควบคุมหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อที่มี 3 DOF (ดังภาพที่ 1) โดยที่  $q$  เป็นระยะการเคลื่อนที่ไปข้างหน้า (longitudinal displacement;  $q$ )  $y$  เป็นมุมการเอียงตัว (tilt หรือ pitch) และ  $f$  เป็นมุมการหมุนรอบตัวเอง (yaw) โดยใช้เทคนิคการควบคุมเชิงทำนายแบบจำลอง (Model Predictive Control; MPC) [21] เพื่อให้หุ่นยนต์สองล้อรักษาเสถียรภาพให้ตั้งตรง (up-right position) หรือ  $q = 0$  อยู่ตลอดเวลา ภายใต้คำสั่งให้เคลื่อนที่ไปหน้าและหมุนเลี้ยว สมรรถนะของตัวควบคุม MPC ที่ออกแบบจะนำไปเปรียบเทียบกับตัวควบคุม LQR ในกรณีนี้ที่เพิ่มเงื่อนไขข้อจำกัดที่ตัวกระตุ้น (actuator)

ในบทความประกอบด้วย หัวข้อที่ 2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แบบจำลองหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อ โดยใช้สมการสมการ EL ร่วมกับการทำให้เป็นเชิงเส้น (linearization) หัวข้อที่ 3 จะนำแบบจำลองเชิงเส้นมาออกแบบตัวควบคุม LQR และตัวควบคุม MPC โดยแสดงผลการจำลองเปรียบเทียบสมรรถนะของตัวควบคุมทั้งสองในหัวข้อที่ 4 สรุปผลและวิจารณ์ในหัวข้อที่ 5 และสุดท้ายหัวข้อที่ 6 เป็นเอกสารอ้างอิง

## 2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

### 2.1 สมการของออยเลอร์-ลากรอนจ์

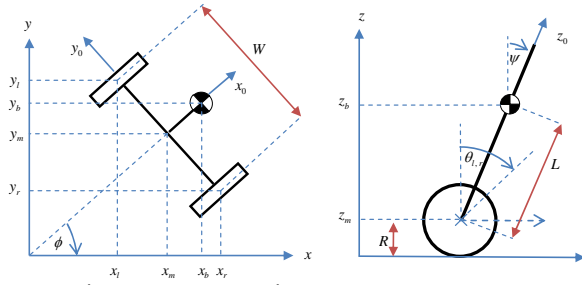
ระบบทางกลอย่างง่าย (simple mechanical system) ที่มี  $n$ -DOF จะมีสมการ EL กำหนดโดย

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \quad (1)$$

โดยที่  $q \hat{=} \{ q_i \}$  เป็นโคออร์ดิเนตทั่วไปของระบบ,  $F_i$  เป็นแรงไม่อนุรักษ์ภายนอก (non-conservative force) และ  $L$  เป็นฟังก์ชันลากรอนจ์ (Lagrangian) ซึ่งนิยามจากผลต่างของพลังงานจลน์,  $T$  และพลังงานศักย์,  $V$  ของระบบ

ในที่นี้ พิจารณาระบบหุ่นยนต์สองล้อ ดังรูปที่ 2 เมื่อ  $q = [q \ y \ f]^T \hat{=} \{ q_i \}$  นั่นคือเป็นระบบที่มี 3-DOF และ  $F = [F_q \ F_y \ F_f]^T$  จะได้ว่า

## DRC-20



รูปที่ 2 โคออร์ดิเนตทั่วไปของหุ่นยนต์สองล้อ

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_l^2 + \dot{x}_r^2 + \dot{y}_l^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_l^2 + \dot{z}_r^2) + \frac{1}{2}(J_w(\dot{q}_l^2 + \dot{q}_r^2) + J_y\dot{y}^2 + J_f\dot{f}^2) + \frac{1}{2}J_m((\dot{q}_l - y)^2 + (\dot{q}_r - y)^2) - mgz_l - mgz_r - Mgz_b \quad (2)$$

### 2.2 สมการของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอกทั่วไป  $F_i$  กับแรงเคลื่อนไฟฟ้าจากมอเตอร์  $v_r$  (ด้านขวา) และ  $v_l$  (ด้านซ้าย) กำหนดโดย

$$\begin{cases} F_q = \frac{a}{2}(v_l + v_r) - (b + f_w)\dot{q} + b\dot{y} \\ F_y = -a(v_r + v_l) + 2b\dot{q} - 2b\dot{y} \\ F_f = \frac{R}{W}a(v_r - v_l) - (b + \frac{W}{R}f_w)\dot{f} \end{cases} \quad (3)$$

โดยที่  $a = K_t / R_m$  และ  $b = K_t K_b / R_m + f_m$  เป็นค่าคงที่ขึ้นกับแรงเคลื่อนไฟฟ้าป้อนกลับของมอเตอร์ (DC motor back EMF constant,  $K_b$ ) ความต้านทานมอเตอร์ (DC motor resistance,  $R_m$ ) ค่าคงที่ของมอเตอร์ (DC motor torque constant,  $K_t$ ), แรงเสียดทานระหว่างหุ่นยนต์กับมอเตอร์  $f_m$  และพื้นกับล้อ  $f_w$

### 2.3 สมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์สองล้อ

โดยรวมความสัมพันธ์จากอินพุตของแรงเคลื่อนไฟฟ้าจากมอเตอร์ไปยังแรงภายนอกทั่วไป (3) และฟังก์ชันของลากรอนจ์ (2) แทนค่าใน (1) จะได้สมการการเคลื่อนที่ที่ไม่เชิงเส้น (nonlinear equation of motion) ของหุ่นยนต์สองล้ออยู่ในรูป

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)(Wu - h(q, \dot{q})) \quad (4)$$

โดยที่  $u = [v_r \ v_l]^T \hat{I} ;^{2 \times 1}$  เป็นเวกเตอร์ของสัญญาณควบคุม (control vector),  $D(q) = [d_{ij}] \hat{I} ;^{3 \times 3}$  เป็นเมตริกซ์ความเฉื่อย (inertia matrix) มีสมบัติสมมาตร (symmetric matrix) และเป็นบวกแน่นอน (positive definite) และ  $h(q, \dot{q}) = [h_1 \ h_2 \ h_3]^T \hat{I} ;^{3 \times 1}$  เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น เมื่อ

$$\begin{aligned} d_{11} &= (2m + M)R^2 + 2J_w + 2n^2J_m \\ d_{12} &= d_{21} = MLR \cos y - 2n^2J_m \\ d_{13} &= d_{31} = d_{23} = d_{32} = 0 \\ d_{22} &= ML^2 + J_y + 2n^2J_m \\ d_{33} &= \frac{1}{2}mW^2 + J_f + \frac{W^2}{2R^2}(J_w + n^2J_m) \\ &\quad + (2m + M)R^2q^2 + 2MLRq \sin y \\ h_{11} &= -MLR\dot{y} \sin y - [(2m + M)R^2q \\ &\quad + MLR \sin y] \dot{y} - b\dot{y} + (b + f_w)\dot{q} \\ h_{12} &= 2b\dot{y} - 2b\dot{q} - (MLRq \\ &\quad + ML^2 \sin y) \dot{y} \cos y - MgL \sin y \\ h_{13} &= 2[(2m + M)R^2q\dot{q} + ML^2\dot{y} \sin y \cos y \\ &\quad + MLR\dot{f} \sin y + q\dot{f} \cos y] + (b + \frac{W}{R}f_w)\dot{f} \end{aligned}$$

นอกจากนั้น เมตริกซ์ของอินพุต (input matrix)  $W$  กำหนดโดย

$$W = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & -a \\ \frac{a}{2} & -a \end{bmatrix} \frac{R}{W} a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{I} ;^{3 \times 2}$$

มีค่า  $\text{rank}(W) = 2 < n = 3$  ระบบหุ่นยนต์สองล้อตามแบบจำลอง (4) จึงเป็นระบบที่มีจำนวนตัวขับเคลื่อนน้อยกว่าองศาอิสระการเคลื่อนที่ (UMS)

### 3. การออกแบบตัวควบคุม

บทความนี้สนใจการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธี MPC และวิธี LQR เพื่อรักษาสถานะของหุ่นยนต์ทรงตัวในแนวตั้งขึ้น (up-right position) ( $q_{eq} = 0$ ) ภายใต้การเลี้ยวและการเคลื่อนที่ไปข้างหน้า ด้วยวิธีการทั้งสองจะใช้ระบบเชิงเส้น (linear system) ในการออกแบบ ดังนั้นโดยการประมาณค่ารอบจุดสมดุลโดยพิจารณาเมื่อ  $y \gg 0$  จะได้  $\sin(y) \gg y$  และ  $\cos(y) \gg 1$  นอกจากนี้  $\dot{q}_i \gg 0, "i, j$  เมื่อกำหนดตัวแปรสแตท  $x = [q \ y \ \dot{q}_y \ \dot{f}]^T \hat{I} ;^6$

## DRC-20

จะได้ สมการปริภูมิสถานะเชิงเส้น (linear state-space equation) และสมการสัญญาณเอาต์พุต (output equation) ในรูป

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (5)$$

โดยที่  $A =$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -60.78 & -1.37 & 1.37 & 0 & 0 \\ 87.64 & 1.39 & -1.39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.21 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1.33 & -1.35 & 0 & -0.12 \\ 0 & 1.33 & -1.35 & 0 & -0.12 \end{bmatrix}$$

สามารถควบคุมได้ (controllable) และ

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (หรือ } y = [q \ y \ f]^T \text{)}$$

ให้  $x_{ref} = [q_r \ 0 \ 0 \ 0 \ f_r \ 0]^T$  เป็นสัญญาณอินพุตอ้างอิง (reference input) ของหุ่นยนต์สองล้อ ดังนั้นปัญหาการติดตามสัญญาณอ้างอิง (tracking problem) พิจารณาโดยต้องการให้สัญญาณคลาดเคลื่อน (error signal)  $e = x_{ref} - x$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ นั่นคือ  $x \approx x_{ref}$  เมื่อเวลาเป็นอนันต์

### 3.1 ตัวควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้น (linear quadratic regulator; LQR)

การออกแบบตัวควบคุม LQR เป็นการหาคำตอบของปัญหาการควบคุมเหมาะสมที่สุด (optimal control) เพื่อต้องการให้ดัชนีสมรรถนะ (performance index;  $J$ ) มีค่าน้อยที่สุด โดยที่

$$J = \int_0^{\infty} (e^T Q e + u^T R u) dt$$

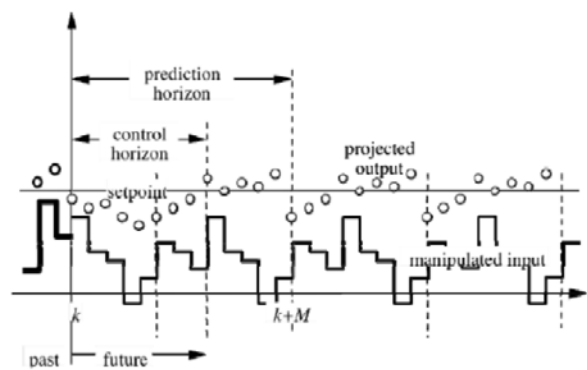
เมื่อ  $Q$  เป็นเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนักของตัวแปรสถานะ ซึ่งเป็นเมตริกซ์บวกแน่นอน (p.d.) และ  $R$  เป็นเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนักของสัญญาณควบคุม เมื่อออกแบบให้  $Q = \text{dia}[10^4, 10^2, 1, 1, 10^4, 1]$  และ  $R =$

$\text{dia}[10^3, 10^3]$  โดยอาศัยคำสั่ง “lqr” หาค่าอัตราขยาย  $K$  ของสัญญาณควบคุม  $u$  จะได้

$$K = \begin{bmatrix} 3.2 & -85.4 & -4.2 & -11 & -2.2 & -3.6 \\ 3.2 & -85.4 & -4.2 & -11 & 2.2 & 3.6 \end{bmatrix}$$

### 3.2 การควบคุมเชิงทำนายแบบจำลองเชิงเส้น

การควบคุมเชิงทำนายแบบจำลอง (MPC) [21] มีหลักการทำงานแสดงในรูปที่ 3 เมื่อกราฟจุดแทนสัญญาณเอาต์พุต และกราฟเส้นเติมแทนสัญญาณอินพุต เริ่มจากการวัดสัญญาณอินพุตและเอาต์พุตในเวลาอดีตจนถึงปัจจุบัน ( $k$ ) มาทำนายสัญญาณเอาต์พุตที่เกิดขึ้นในช่วงอนาคตที่เรียกว่า ช่วงเวลาทำนาย (prediction horizon) ( $k+M$ ) การควบคุมแบบ MPC จะใช้การคำนวณจากสัญญาณที่ได้จากการทำนายในอนาคตและสัญญาณที่ได้จากการวัดในปัจจุบัน ร่วมกับการหาเหมาะสมที่สุด (optimization) ของฟังก์ชันเป้าหมาย (cost function) ซึ่งจะให้กฎการควบคุม (control law) ที่เหมาะสมที่สุดภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด (constraint) ต่าง ๆ



รูปที่ 3 พื้นฐานการควบคุมแบบ MPC [21]

การควบคุมแบบ MPC จะทำงานบนปริภูมิสถานะเชิงเส้นแบบดิสครีต (discrete state-space model) สำหรับระบบ MIMO ที่มีจำนวน  $m$  อินพุต  $q$  เอาต์พุต โดยที่  $q \neq m$  และมี  $n_1$  ตัวแปรสถานะแทนจำนวนเอาต์พุต กำหนดโดย

$$\begin{cases} \dot{x}_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u(k) + B_d w(k) \\ y(k) = C_m x_m(k) \end{cases} \quad (9)$$

## DRC-20

โดยที่  $w$  เป็นสัญญาณอินพุตของการรบกวน (input disturbance) ลำดับของสัญญาณรบกวนขาว (white noise sequence)  $e$  กำหนดโดย

$$w(k) - w(k - 1) = e(k) \quad (10)$$

สมมติ  $Dx_m(k) = x_m(k) - x_m(k - 1)$ ,  $Du(k) = u(k) - u(k - 1)$ ,  $Dy(k + 1) = y(k + 1) - y(k)$  และให้ตัวแปรสถานะใหม่  $x(k) = [Dx_m(k) \ y(k)]^T$  ดังนั้นจาก (9) จึงได้

$$\begin{bmatrix} Dx_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & 0 \\ C_m & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ C_m \end{bmatrix} Du(k) + \begin{bmatrix} B_d \\ C_m \end{bmatrix} e(k) \quad (11)$$

โดยที่  $I_{q \times q}$ ;  $q \times q$  เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์,  $O_m \hat{I}$ ;  $q \times n_1$  เป็นเมตริกซ์ศูนย์  $A_m \hat{I}$ ;  $n_1 \times n_1$ ,  $B_m \hat{I}$ ;  $n_1 \times m$  และ  $C_m \hat{I}$ ;  $q \times n_1$  การทำให้เอาต์พุตจากการทำนายเข้าใกล้สัญญาณอ้างอิง (reference) จึงต้องพิจารณาให้ฟังก์ชันเป้าหมาย (cost function)  $J$  มีค่าน้อยที่สุด โดยที่  $J(Du) =$

$$\sum_{i=0}^{p-1} \left\{ (y(k+i+1/k) - r(k+i+1))^T Q (y(k+i+1/k) - r(k+i+1)) + Du(k+i/k)^T R_{Du}(k+i/k) + (u(k+i/k) - u_{target}(k+i))^T R_u (u(k+i/k) - u_{target}(k+i)) \right\}$$

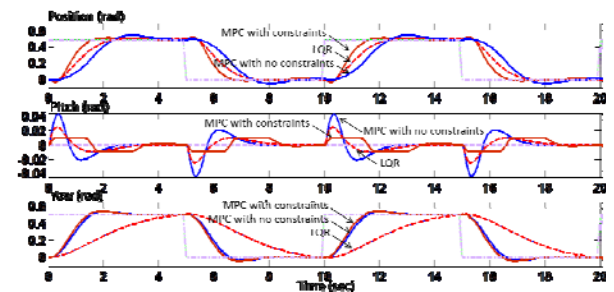
เมื่อ  $Q$ ,  $R_{Du}$  และ  $R_u$  เป็นเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนักของสัญญาณเอาต์พุต, การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณอินพุต และสัญญาณอินพุต ตามลำดับ

### 4. ผลการควบคุม

ตัวควบคุม MPC คำนวณจาก Model Predictive Control Toolbox<sup>TM</sup> [3] ของโปรแกรม MATLAB โดย

ใช้คำสั่ง “mpctool” โดยนำมาเปรียบเทียบกับตัวควบคุม LQR การออกแบบตัวควบคุมทั้งสองใช้แบบจำลองเชิงเส้น (5) และตัวควบคุมที่ออกแบบได้นำไปจำลองผล (simulation) การควบคุมกับระบบไม่เชิงเส้น (4) โดยพารามิเตอร์ที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุม MPC มีดังนี้ Control Interval Time (หรือ Sampling Period (Ts)) = 0.1, Prediction Horizon (p) = 10, Control Horizon (m) = 2, Input Weight (R) = 0.1 และ Output Weight (Q) = 1 เมื่อให้สัญญาณอ้างอิง  $x_{ref}$  ของหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อเป็นตำแหน่งการเคลื่อนที่ (position) และมุมการหมุนรอบตัว (yaw) กำหนดในรูปของสัญญาณพัลส์ (pulse) ผลตอบสนองของการควบคุมทั้งสอง แสดงดังรูปที่ 4 โดยพิจารณาออกเป็น 2 กรณีคือ

1) กรณีที่ไม่ได้กำหนดข้อบังคับ (with no constraint) ของสัญญาณเอาต์พุตและสัญญาณอินพุตควบคุม ตัวควบคุม MPC ที่ออกแบบให้ค่าความคลาดเคลื่อนของมุมพิตช์ (pitch) สูงสุดที่  $\pm 0.042$  rad มากกว่าตัวควบคุม LQR ซึ่งมีค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดที่  $\pm 0.025$  rad และยังติดตามตำแหน่งการไปข้างหน้า (position) ได้ช้ากว่าตัวควบคุม LQR อย่างไรก็ตาม ตัวควบคุม MPC ในกรณีนี้ สามารถติดตามมุมการเลี้ยว (yaw) ได้ดีกว่าตัวควบคุม LQR โดยมีค่า rise time ที่เร็วกว่าและเกิดโอเวอร์ชูตเพียงเล็กน้อย

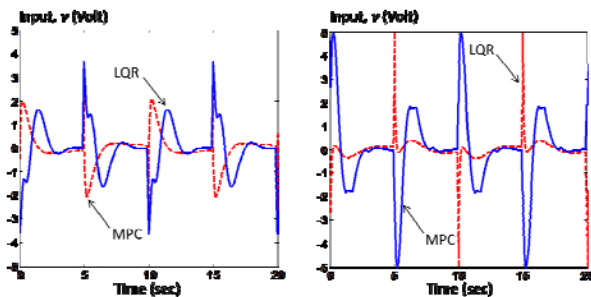


รูปที่ 4 ผลตอบสนองการควบคุม LQR, MPC ทั้งกรณีที่ไม่ได้กำหนดข้อบังคับ และมีการกำหนดข้อบังคับ

2) กรณีที่มีการกำหนดข้อบังคับของสัญญาณเอาต์พุต: มุมพิตช์  $y$  (min, max) = (-0.01, +0.01)

## DRC-20

rad. และข้อบังคับของสัญญาณควบคุมอินพุต (constraints on manipulated variables): แรงเคลื่อนไฟฟ้ามอเตอร์  $u$  (min, max) = (-5, +5) Volt จากผลการจำลอง (ดูรูปที่ 4) พบว่าตัวควบคุม MPC ในกรณีนี้ให้ค่าความคลาดเคลื่อนของมุมพิตช์เป็นไปตามข้อบังคับที่ออกแบบคือ ไม่เกิน  $\pm 0.01$  rad ทั้งยังมีความเร็วในการติดตามตำแหน่งการไปข้างหน้า (position) ได้ดีกว่าตัวควบคุม LQR นอกจากนี้ความสามารถในการติดตามมุมการเลี้ยว (yaw) ของตัวควบคุม MPC ทั้งสองกรณีนี้ใกล้เคียงกัน



รูปที่ 5 ค่าเฉลี่ยของสัญญาณควบคุม ด้านซ้าย: ไม่ได้กำหนดข้อบังคับ, ด้านขวา: กำหนดข้อบังคับ

เมื่อพิจารณาขนาดของสัญญาณควบคุมเฉลี่ยที่ให้กับมอเตอร์ทั้งสอง (ทั้งสองกรณี) จากรูปที่ 5 พบว่าขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุม MPC มีค่ามากกว่าการควบคุม LQR อย่างไรก็ตามในกรณีที่มีการกำหนดข้อบังคับ (รูปที่ 5 ด้านขวา) เพื่อให้ได้สมรรถนะการควบคุมที่ดีที่สุด ตัวควบคุม MPC จะพยายามควบคุมการทำงานของมอเตอร์โดยใช้แรงเคลื่อนไฟฟ้าที่มีอยู่ ภายในข้อบังคับของสัญญาณอินพุตควบคุม (ที่ออกแบบไว้คือ  $\pm 5$  Volt) จัดการให้ค่าความคลาดเคลื่อนของสัญญาณเอาต์พุต อยู่ภายในขอบเขตตามที่ได้ออกแบบคือ ไม่เกิน  $\pm 0.01$  rad อย่างไรก็ตาม การกำหนดข้อบังคับของสัญญาณทั้งสอง ต้องออกแบบให้สัมพันธ์กันเพื่อให้ระบบปิดมีเสถียรภาพ (stable)

### 5. สรุปและวิจารณ์

ระบบหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อเป็นระบบที่มีการศึกษากันอย่างมากทั้งในด้านการประยุกต์ใช้ และการวิจัย การควบคุมหุ่นยนต์ทรงตัวสองล้อส่วนใหญ่ใช้ตัวควบคุม PID หรือตัวควบคุม LQR ในบทความนี้ได้ทำการเปรียบเทียบการออกแบบตัวควบคุม MPC กับตัวควบคุม LQR ตัวควบคุมทั้งสองแม้ให้ผลการควบคุมที่มีเสถียรภาพและสามารถทำงานได้ แต่ตัวควบคุม MPC มีจุดเด่นคือ สามารถกำหนดข้อบังคับ (constraints) ของสัญญาณควบคุมอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตได้ โดยตัวควบคุม MPC จะทำการปรับขนาดของสัญญาณควบคุมให้สามารถทำงานได้เต็มประสิทธิภาพตามเงื่อนไขข้อบังคับของข้อจำกัดอุปกรณ์ขับเคลื่อน (actuator) ที่ออกแบบไว้คือ ไม่เกิน  $\pm 5$  Volt. และให้ค่าคลาดเคลื่อนของมุมพิตช์ภายในขอบเขตที่กำหนดคือ  $\pm 0.01$  rad โดยยังสามารถติดตามสัญญาณอ้างอิงได้ดี

### 6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Alarfaj, M. and Kantor, G., 2010. Centrifugal force compensation of a two-wheeled balancing robot, paper presented in *the Control Automation Robotics & Vision, 2010*.
- [2] Anderson, D.P. nBot. URL: <http://www.geology.smu.edu/~dpa-www/robo/nbot/>
- [3] Bemporad, A., Morari, M. and Ricker, N.L. (2013) Model Predictive Control Toolbox User's Guide. Mathworks.
- [4] Butler, L.J. and Bright, G. (2008). Feedback control of a self-balancing materials handling robot, paper presented in *the 10<sup>th</sup> Inter. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision, 2008*.
- [5] Chan, P.M.C., Stol, K.A. and Halkyard, C.R. (2013). Review of modelling and control of two-wheeled robots, *Annual Reviews in Control*, vol. 37: pp. 89–103.
- [6] Chiu, C.-H., Peng, Y.-F. and Lin, Y.-W. (2011). Intelligent backstepping control for wheeled

## DRC-20

- inverted pendulum, *Expert Systems with Applications*, vol. 38: pp. 3364–3371.
- [7] Feng, T., Liu, T., Wang, X., Xu, Z., Zhang, M. and Han, S.-C. (2011). Modeling and implementation of two-wheel self-balancing robot equipped with supporting arms, paper presented in the 6<sup>th</sup> *IEEE Conf. on Indus. Elect.&Appl.*, 2011.
- [8] Grasser, F., Arrigo, A.D., Colombi, S. and Ruffer, A. (2002) JOE: a Mobile Inverted Pendulum. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 49(1): pp. 107-114.
- [9] Huang, J., Ding, F., Fukuda, T. and Matsuno, T. (2012). Modeling and Velocity Control for a Novel Narrow Vehicle Based on Mobile Wheeled Inverted Pendulum, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2012.
- [10] Huang, J., Guan, Z.-H., Fukuda, T.M.T. and Sekiyama, K. (2010). Sliding-mode velocity control of mobile-wheeled inverted-pendulum systems. *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 26(4): pp. 750-758.
- [11] Kamen, D. Segway Company. URL: <http://www.segway.com/>
- [12] Kausar, Z., Stol, K. and Patel, N. (2012). Nonlinear control design using Lyapunov function for two wheeled mobile robots, paper presented in the *M2VIP*, 2012.
- [13] Li, J., Gao, X., Huang, Q., & Matsumoto, O. (2008). Controller design of a two-wheeled inverted pendulum mobile robot, paper presented in the *IEEE Inter. Conf. on Mech. & Auto.*, 2008.
- [14] Liao, Y. and Li, M. (2010). The design of two-wheel mobile platform, paper presented in the *International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation*, 2010.
- [15] Lien, J., Tu, L., Ross, W. and Burvill, C. (2006). Implementation issues for an inexpensive inverted-pendulum mobile robot, paper presented in the *Inter. Conf. on Information & Auto.*, 2006.
- [16] Lupian, L.F. and Avila, R. (2008). Stabilization of a wheeled inverted pendulum by a continuous-time infinite-horizon LQG optimal controller, paper presented in the *Robotic Symposium*, 2008.
- [17] Moore, S.M., Lai, J.C.S. and Shankar, K. (2007). ARMAX modal parameter identification in the presence of unmeasured excitation—I: Theoretical background *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21 pp. 1601–1615.
- [18] Nasir, A.N.K., Ahmad, M.A., Ghazali, R. and Pakheri, N.S. (2011). Performance comparison between fuzzy logic controller (FLC) and PID controller for a highly nonlinear two-wheels balancing robot, paper presented in the 1<sup>st</sup> *Conf. on Infor. & Com. Intell.*, 2011.
- [19] Sun, L. and Gan, J. (2010). Researching of two-wheeled self-balancing robot base on LQR combined with PID, paper presented in the *In 2<sup>nd</sup> Inter. Workshop on Intel. Sys. & Appl.*, 2010.
- [20] Takei, T., Imamura, R. and Yuta, S. (2009). Baggage transportation and navigation by a wheeled inverted pendulum mobile robot. *IEEE Trans. on Indus. Elec.*, vol. 56, pp. 3985-3994.
- [21] Wang, L. (2009). *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. Springer-Verlag, London.
- [22] Wu, J. and Zhang, W. (2011a). Research on control method of two-wheeled self-balancing robot. paper presented in the *Conf. on Intell. Comp. Techno. & Auto.*, 2011.
- [23] Xu, J.-X., Guo, Z.-Q. and Lee, T.H. (2013). Design and Implementation of a Takagi–Sugeno-Type Fuzzy Logic Controller on a Two-Wheeled Mobile Robot, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60(12): pp. 5717-5728.