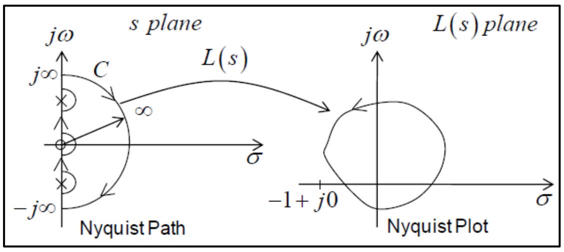
Nyquist stability criterion

เทคนิคที่ใช้หา stability property ของระบบ closed-loop จาก open-loop frequency response และ open-loop poles/zeros



1) Nyquist path

เส้นโค้งปิดครอบคลุมพื้นที่ฝั่งขวาของระนาบเชิงซ้อน โดยหลบ open-loop poles และ zeros ที่อยู่บนแกน $j\omega$

2) Nyquist plot

เส้นโค้งปิดของ open-loop transfer function $L(s)$ เมื่อ $s=\sigma+j\omega=re^{j\theta}$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บน Nyquist path

3) Nyquist stability criterion

Z = 0 CL STABLE

Z > 0 CL UNSTABLE

หา Z จากสูตร $\boxed{Z=N+P}$

Z คือจำนวนของ unstable closed-loop poles

N คือจำนวนรอบที่ Nyquist plot วนรอบจุด -1 (ตามเข็มเป็น + ทวนเข็มเป็น -)

P คือจำนวนของ unstable open-loop poles (RHP)

วิธีการวาด Nyquist plot

1) Nyquist plot สมมาตรรอบแกนจำนวนจริง

2) เส้นโค้งเล็ก (ใหญ่) บน Nyquist path กลายเป็นเส้นโค้งใหญ่ (เล็ก) บน Nyquist plot

3) เส้นตรง $j\omega$ บน Nyquist path สามารถใช้ Bode magnitude และ Bode phase plots หาเส้นโค้งบน Nyquist plot ได้

ตัวอย่าง 1: จงหา stability property ของระบบ

$$L(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$$

OL POLES $s = 0, -\frac{1}{T}$

อยู่บนแกน jω

OL ZEROS ไม่มี

เส้นโค้งเล็ก ABC: $s=\varepsilon e^{j\theta},\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},$

$$L\left(\varepsilon e^{j\theta}\right)=\frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}\left(T\varepsilon e^{j\theta}+1\right)}\approx\frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}}=\frac{K}{\varepsilon}e^{j(-\theta)}$$

เส้นตรง CD: $s=j\omega,\ 0<\omega<\infty,$

$$L(j\omega)=\frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)}$$

ใช้ BODE PLOTS

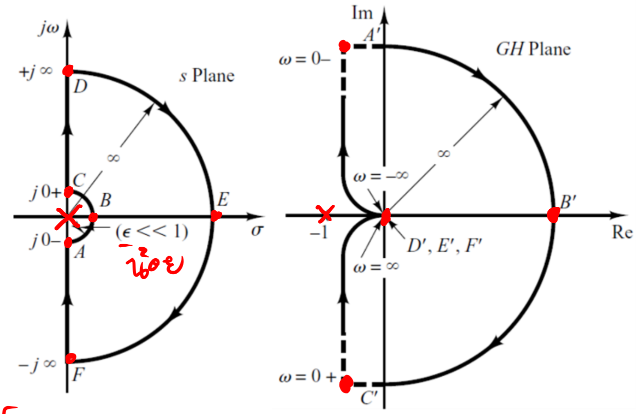
$$|L| = \frac{K}{\omega\sqrt{(\omega T)^2+1^2}}$$

$$\angle L = \angle K - \angle j\omega - \angle(Tj\omega+1) = 0^\circ - \pi/2 - \tan^{-1}\left(\frac{T\omega}{1}\right)$$

เส้นโค้งใหญ่ DEF: $s=\infty e^{j\theta},$

$$L\left(\infty e^{j\theta}\right)=\frac{K}{\infty e^{j\theta}\left(T\infty e^{j\theta}+1\right)}\approx 0$$

เส้นตรง FA: ใช้ความสมมาตร

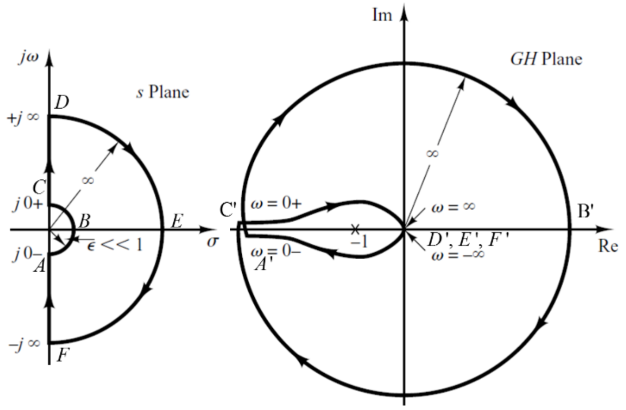


Nyquist path Nyquist plot

$Z=N+P=0+0=0,$ ระบบ CL stable

ตัวอย่าง 2: จงหา stability property ของระบบ

$$L(s)=\frac{K}{s^2(Ts+1)}$$



$Z=N+P=2+0=2,$ ระบบ unstable

(ตัวอย่าง 9.1 ถึง 9.6 และในตารางที่ 9.6 ในหนังสือ Dorf)

Relative stability

โดยทั่วไปเราจะออกแบบให้ระบบ open-loop มีความ stable $(P=0)$ ดังนั้น Nyquist plot ต้องไม่วนรอบจุด -1 $(N=0)$ เพื่อให้ระบบ closed-loop มีความ stable $(Z=0)$

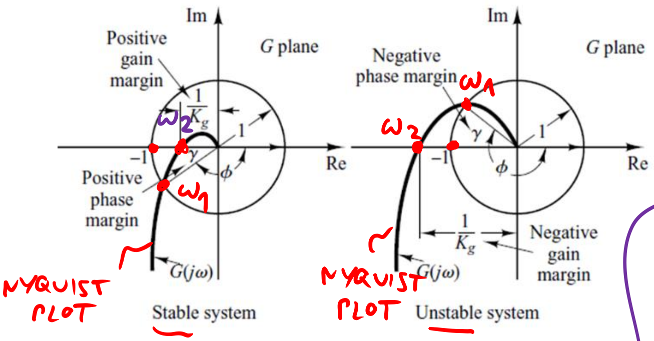
Relative stability วัดความห่างของ Nyquist plot จากจุด -1

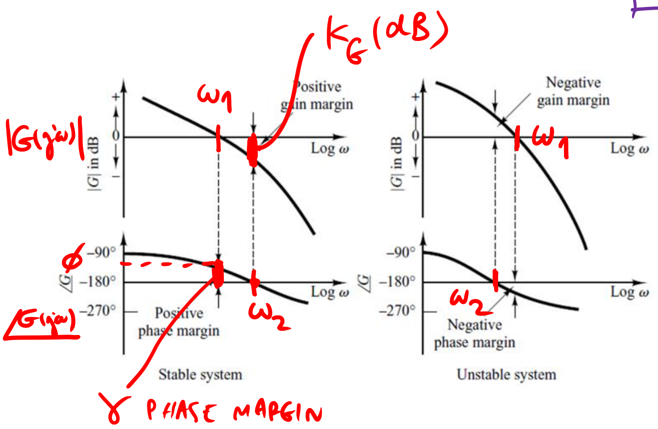
1) Phase margin

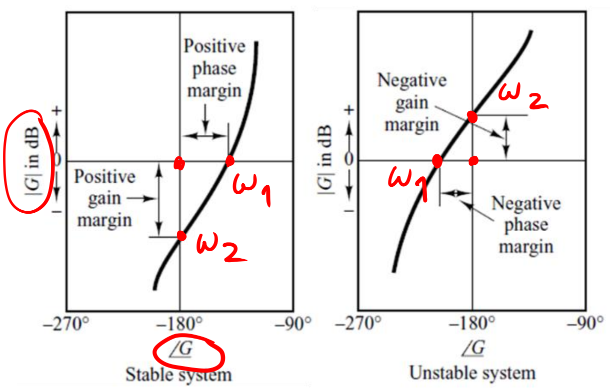
$$\boxed{\gamma = \angle G(j\omega_1) - (-180^\circ)} \text{ เมื่อ } |G(j\omega_1)| = 1$$

2) Gain margin

$$\boxed{K_g = \frac{1}{|G(j\omega_2)|}} \text{ เมื่อ } \angle G(j\omega_2) = -180^\circ$$







LOG-MAGNITUDE-VERSUS-PHASE PLOT

3) สำหรับ $0 \le \zeta \le 0.6$,

$$\boxed{\zeta = \frac{\gamma}{100}}$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง PHASE MARGIN γ กับ DAMPING RATIO ζ

(ทำ skills check ข้อ 6, ~~12~~, 15 ในหนังสือ Dorf)

ζ TIME DOMAIN (TRANSIENT)

γ FREQ. DOMAIN

CL STABLE ไม่วนรอบจุด -1

PHASE MARGIN

$\phi = \angle G(j\omega_1)$

$|G(j\omega_1)| = 1$

$\gamma = \phi - (-180^\circ)$

$\boxed{\gamma > 0^\circ}$ CL STABLE

$\boxed{\gamma < 0^\circ}$ CL UNSTABLE

γ บอกความห่างของ NYQUIST PLOT จากจุด -1 (มุม)

GAIN MARGIN

$\angle G(j\omega_2) = -180^\circ$

$K_G = \frac{1}{|G(j\omega_2)|}$

$K_G > 1$ CL STABLE $\boxed{(K_G > 0\text{ dB})}$

$K_G < 1$ CL UNSTABLE $\boxed{(K_G < 0\text{ dB})}$

K_G บอกความห่างของ NYQUIST PLOT จากจุด -1 (ขนาด)

ω_1 = CROSSOVER FREQUENCY $(|G(j\omega_1)| = 0\text{ dB})$ $= 1$