

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบแม่นยำของแขนกลชนิดยืดหยุ่น

Exact Mathematical Modeling of a One-link Flexible-link Robot Manipulator

กนกศักดิ์ เอี่ยมสมย์^{1*} และ วิจิต นัตร์รัตนกุลชัย¹

¹ ห้องปฏิบัติการควบคุมหุ่นยนต์และการสัมผัสเทียม (CRV Lab) ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ จตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทร 083-035-6291 โทรสาร 0-2579-4576 *อีเมลล์ bird_honest@hotmail.com

บทคัดย่อ

แขนกลที่สร้างมาจากวัสดุที่มีความยืดหยุ่น ลักษณะทางพลศาสตร์จะมีความสลับซับซ้อน เนื่องจากมีมุมมองศาสิระเป็นอนันต์ ในปัจจุบันแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลชนิดยืดหยุ่นที่ใช้โดยทั่วไปจึงถูกสร้างด้วยวิธีการประมาณ ความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองจากการประมาณนี้ ทำให้การอธิบายพลศาสตร์ของแขนกลขาดความแม่นยำ บทความนี้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากทฤษฎีคานของ Euler - Bernoulli โดยให้แกนอ้างอิงหมุนขนานกับแขนกลที่จุดฐาน (Pseudo-clamped) และแก้สมการแบบแม่นยำด้วยวิธีแยกตัวแปร แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบแม่นยำที่ได้ ถูกนำมาใช้หาความถี่ธรรมชาติ และถูกนำมาสร้างเป็นแบบจำลองปริภูมิสถานะ เพื่อใช้ทำนายมุมที่เคลื่อนไปของแขนกล แบบจำลองแบบแม่นยำที่ได้ ถูกนำมาเปรียบเทียบกับวิธีประมาณจากสมการของ Lagrange และชุดทดลองแขนกลชนิดยืดหยุ่นจริง ผลจากการทดลอง สรุปได้ว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการแก้สมการแบบแม่นยำมีความแม่นยำและสอดคล้องกับพลศาสตร์ของแขนกลชนิดยืดหยุ่นที่มีอยู่จริงมากกว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากวิธีการประมาณ

Abstract

Flexible-link robot manipulator has complicated dynamic system because it has infinite degrees of freedom. Presently, the general mathematical model of flexible-link robot manipulator is obtained from approximation method, which is not highly accurate. This paper presents two approaches. The first approach is based on the exact mathematical model (for distributed parameter system) using Euler-Bernoulli thin beam theorem. Rotating reference frame is parallel to the robot's base, a so-called pseudo-clamped reference frame. The separation of variables method is used to find the solution. The second approach considers lumped parameter system (approximation method) and uses Lagrange method to obtain the approximate model. The state-space model and natural frequency of the

system are obtained using both approaches. An experiment with an actual flexible-link robot is performed. The experimental results confirm that the exact mathematical model has higher accuracy in predicting the system's dynamic than the approximate model.

1. คำนำ

ปัญหาเรื่องการหาสมการทางคณิตศาสตร์ของระบบแขนกลชนิดยืดหยุ่นมีความซับซ้อนมากเนื่องจากระบบมีองศาอิสระเป็นอนันต์ จึงนับเป็นงานที่ทำหายสำหรับนักวิจัยในปัจจุบัน

สำหรับชุดทดลองแขนกลชนิดยืดหยุ่นนั้นกำหนดให้แกนอ้างอิงหมุนขนานกับแขนกลที่จุดฐาน (Pseudo-clamped) [1] วัดตำแหน่งการเคลื่อนที่ที่จุดใดจุดใดด้วย Strain gauge [2] และหาความถี่ธรรมชาติจากสัญญาณความเร่งจาก Accelerometer [3] แขนกลนี้ถูกยึดบนฐานที่หมุนด้วยแรงบิดจากมอเตอร์ โดยมี Encoder วัดมุมที่เปลี่ยนแปลง

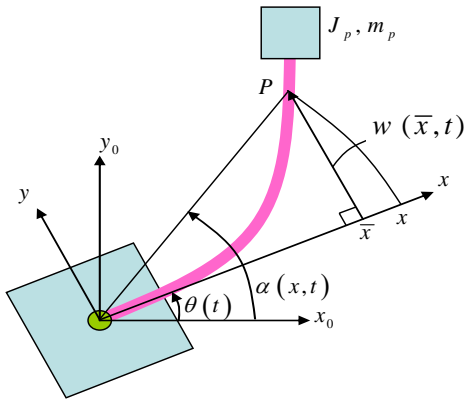
ในบทความนี้จะพิจารณาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบแม่นยำโดยสร้างแบบจำลองมาจากทฤษฎีคานบางของ Euler - Bernoulli [4] จากนั้นแก้สมการโดยวิธีการแยกตัวแปร [1] (Separable of variables method) กับแบบจำลองที่เกิดจากวิธีการประมาณโดยพิจารณาเป็นแบบ Lumped parameter system [5] จะสร้างแบบจำลองด้วยสมการของ Lagrange [6] โดยจะแก้ระบบสมการโดยการวิเคราะห์พลังงานที่เกิดขึ้น

สำหรับในบทความนี้ส่วนแรกจะกล่าวถึงลักษณะของแขนกลชนิดยืดหยุ่นที่เราจะทำการพิจารณา ส่วนที่สองเป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบแม่นยำ โดยในส่วนนี้จะกล่าวถึงปัญหาค่าขอบ [7] การใช้สมการพลังงานในการหาผลเฉลยของแบบจำลอง ในส่วนที่สามเป็นการสร้างแบบจำลองด้วยวิธีการประมาณโดยใช้การพิจารณาระบบเป็น Lumped parameter systems ควบคู่กับวิธีพลังงานของ Lagrange โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งสองแบบจะสามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติและปริภูมิสถานะได้ ในส่วนสุดท้ายเป็นการนำปริภูมิสถานะของแบบจำลองทั้งสองมาทำการเปรียบเทียบกับผลการทดลองจริง

2. ปัญหาของแขนกลชนิดยึดหยุ่น

แขนกลชนิดยึดหยุ่นลักษณะเป็น Pseudo-clamped ทำจากไม้บรรทัดเหล็กมีความหนาแน่นต่อหน่วยความยาวเป็น ρ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนที่ฐานมีค่าเป็น J_b ยาว L โดยฐานสามารถหมุนได้ มีโมเมนต์ความเฉื่อยเป็น J_0 ที่ด้านปลายของแขนกลมีมวล m_p ติดอยู่ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลนี้มีค่าเป็น J_p โครงสร้างทั้งหมดหมุนอยู่บนระนาบอ้างอิง x_0, y_0 เรากำหนดสมมติฐานดังนี้ [8]

1. การเคลื่อนที่ของระบบแขนกลชนิดยึดหยุ่นนี้มีแต่ในแนวระดับเท่านั้นและไม่คิดถึงผลกระทบต่อความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก
2. พิจารณาการเปลี่ยนรูปร่างตามแนวขวาง (transverse) เท่านั้น



รูปที่ 1 แผนภาพของแขนกลชนิดยึดหยุ่น

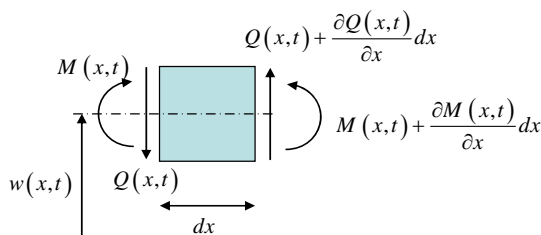
จากรูปที่ 1 เมื่อเราพิจารณาจุด P เป็นจุดใดๆ ที่อยู่บนแขนกล จะได้ว่า $w(x, t)$ คือระยะทางที่เปลี่ยนแปลงไปของจุด P เทียบกับแกน x บนระยะ x, y \bar{x} คือระยะที่ตั้งฉากระหว่างจุด P กับแกน x โดยค่า x มีค่าประมาณ \bar{x} $\theta(t)$ คือ ค่ามุมของฐานที่เปลี่ยนแปลงไป ส่วน $\alpha(x, t)$ คือ ค่าของมุมที่จุด P เทียบกับแกน x_0, y_0 จะได้

$$\alpha(x, t) = \theta(t) + \arctan\left(\frac{w(\bar{x}, t)}{\bar{x}}\right) \quad (1)$$

$$\arctan\left(\frac{w(\bar{x}, t)}{\bar{x}}\right) \approx \arctan\left(\frac{w(x, t)}{x}\right) \approx \frac{w(x, t)}{x} \quad (2)$$

3. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบแมนตรง

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบแมนตรงนั้น เราพิจารณาระบบแขนกลชนิดยึดหยุ่นเป็นแบบต่อเนื่อง [5] โดยแบบจำลองนี้จะสร้างจากทฤษฎีคานของ Euler - Bernoulli จะพิจารณาแขนกลเป็นลักษณะคานได้ดังนี้



รูปที่ 2 พิจารณาคานแบบ Euler - Bernoulli

จากรูปที่ 2 จะได้ความสัมพันธ์ของแรงและโมเมนต์ได้เป็นดังนี้

$$\left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] \quad (3)$$

$$-Q(x, t) = \rho dx \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + x \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \right], 0 < x < L$$

$$\left[M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] \quad (4)$$

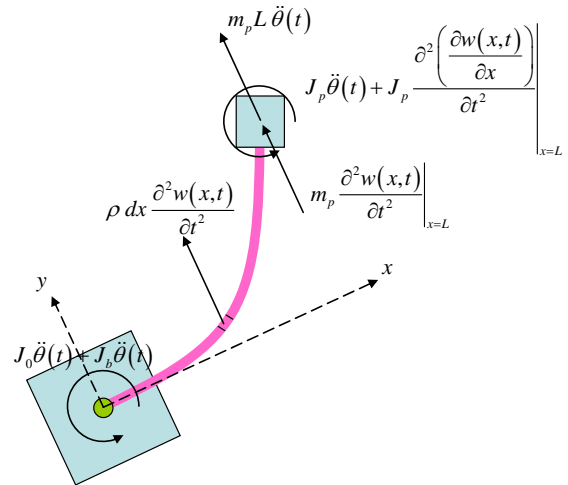
$$-M(x, t) + \left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] dx = 0, 0 < x < L.$$

จากเรื่องกลศาสตร์วัสดุเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์บิดกับระยะที่เปลี่ยนไปได้ดังนี้

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

จาก (3), (4) และ (5) เราสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + x \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \right] = 0, 0 < x < L \quad (6)$$



รูปที่ 3 แสดงแรงต่างๆที่กระทำต่อแขนกลชนิดยึดหยุ่น

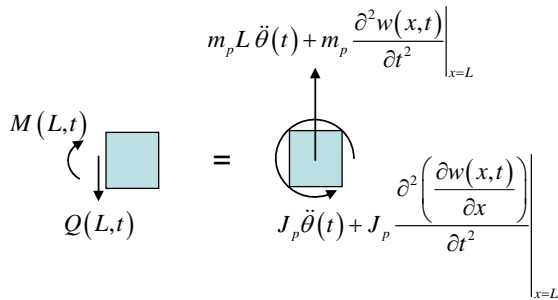
จากรูปที่ 3 เราจะทำการพิจารณาแรงที่กระทำกับแขนกลชนิดยึดหยุ่น เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$T(t) = (J_0 + J_b + J_p + m_p L^2) \ddot{\theta}(t) + \int_0^L \rho x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} dx + m_p L \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + J_p \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)}{\partial t^2} \Big|_{x=L} \quad (7)$$

จาก (6) และ (7) สมการการเคลื่อนที่ที่สามารถเขียนได้เป็น

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{x}{J} \left(-\int_0^L \rho x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} dx - m_p L \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - J_p \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)}{\partial t^2} \Big|_{x=L} \right) \right] = 0 \quad (8)$$

จาก (8) เราพิจารณาระบบแขนกลให้เคลื่อนที่แบบอิสระ $T(t) = 0$ และกำหนดให้ $J = [J_0 + J_b + J_p + m_p L^2]$



รูปที่ 4 แสดงแรงที่กระทำกับมวลที่ปลายของแขนกล

จากรูปที่ 4 เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของแรงที่เกิดขึ้นได้เป็น

$$EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = m_p L \ddot{\theta}(t) + m_p \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L} \quad (9)$$

$$EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = -J_p \ddot{\theta}(t) - J_p \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)}{\partial t^2} \Big|_{x=L} \quad (10)$$

ให้ (9) และ (10) เป็นปัญหาค่าขอบที่จุดปลาย ส่วนปัญหาค่าขอบที่จุดหมุนเป็นดังนี้

$$w(0,t) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

จะเห็นว่าเรามีสมการการเคลื่อนที่คือสมการ (8) และสมการปัญหาค่าขอบสี่สมการ (9)-(12) โดยทุกสมการจะมีฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับสองตัวแปรคือ ระยะที่เปลี่ยนแปลงไป x และเวลา t ดังนั้นจะใช้วิธีการแยกตัวแปร (Separation of variables) เข้ามาช่วยในการแก้สมการ

$$w(x,t) = \psi(x)\delta(t) \quad (13)$$

$\psi(x)$ คือ ฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับระยะทาง (Shape) เพียงตัวแปรเดียว $\delta(t)$ คือ ฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลาเพียงตัวแปรเดียว จากวิธีการแยกตัวแปรจะสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้เป็น

$$-EI \frac{\partial^4 \psi(x)}{\partial x^4} \left[\frac{1}{\delta(t)} \right] = -\omega^2 \left[\frac{1}{\delta(t)} \right] = -\omega^2 \quad (14)$$

จาก (14) ω คือค่าคงที่ดังนั้นจะสามารถเขียนความสัมพันธ์ที่ขึ้นอยู่กับเวลาได้เป็น

$$\frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} + \omega^2 \delta(t) = 0 \quad (15)$$

จาก (15) สามารถหาผลเฉลยได้เป็น

$$\delta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = C \cos(\omega t - \phi) \quad (16)$$

จาก (14) สามารถเขียนความสัมพันธ์ที่ขึ้นอยู่กับระยะที่เปลี่ยนแปลงไป

$$EI \frac{\partial^4 \psi(x)}{\partial x^4} - \omega^2 \rho \psi(x) + \frac{x \omega^2 \rho}{J} \left[\int_0^L \rho x \psi(x) dx - m_p L \psi(x) \Big|_{x=L} - J_p \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right] = 0 \quad (17)$$

ผลเฉลยของ (17) สามารถเขียนได้เป็น

$$\psi(x) = C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x + C_5 x = \bar{\psi}(x) + C_5 x \quad (18)$$

โดยที่ C_1, C_2, C_3, C_4 และ C_5 เป็นค่าคงที่ และกำหนด $\beta = \left(\frac{\omega \rho}{EI} \right)^{1/4}$

แทน (18) ลงใน (17) เราสามารถเขียน C_5 ให้อยู่ในเทอมของ $C_1, C_2, C_3,$ และ C_4 ได้ดังนี้

$$C_5 = \frac{1}{J_0} \left[\rho \int_0^L x \bar{\psi}(x) dx + m_p L \bar{\psi}(L) + J_p \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \Big|_{x=L} \right] \quad (19)$$

เพื่อให้ $\psi(x)$ ไม่เท่ากับศูนย์ จากปัญหาค่าขอบทั้งสี่และ (19) เราสามารถเขียนสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) ที่อยู่ในรูปของ β_i ได้ดัง (20)

$$G \left[(BCEF)^2 - (BF)^2 - (CE)^2 \right] + H(AF - CD) + I(AE - BD) = 0 \quad (20)$$

$$A = \left(\frac{\rho L \beta^{-1}}{J} \text{ch} - \frac{\rho \beta L^3}{J^3} + \left(\frac{m_p L}{J} - \frac{\rho \beta^{-2}}{J} \right) \text{sh} - \frac{m_p L^2 \beta}{J} + \frac{J_p \beta}{J} \text{ch} - \frac{J_p \beta}{J} \right)$$

$$B = \left(\left(\frac{J_p \beta}{J} - \frac{\rho L \beta^{-1}}{J} \right) \text{c} - \frac{\rho \beta L^3}{J^3} + \left(\frac{m_p L}{J} + \frac{\rho \beta^{-2}}{J} \right) \text{s} - \frac{m_p L^2 \beta}{J} - \frac{J_p \beta}{J} \right)$$

$$C = \left(\left(\frac{-\rho L \beta^{-1} - J_p \beta}{J} \right) \text{sh} + \left(\frac{\rho \beta^{-2} - m_p L}{J} \right) \text{ch} + \left(\frac{\rho L \beta^{-1} - J_p \beta}{J} \right) \text{s} \right. \\ \left. + \left(\frac{\rho \beta^{-2} + m_p L}{J} \right) \text{c} - \frac{2\rho \beta^{-2}}{J} \right)$$

$$D = \left(\left(\frac{\rho L \beta^{-1} + J_p \beta}{J} - \beta \right) \text{ch} + \left(\frac{m_p L - \rho \beta^{-2}}{J} + \frac{\rho}{\beta^3 J_p} \right) \text{sh} + \beta - \right. \\ \left. \frac{m_p L^2 \beta}{J} - \frac{J_p \beta}{J} - \frac{\rho \beta L^3}{3J} \right)$$

$$E = \left(\left(\frac{J_p \beta}{J} - \frac{\rho L \beta^{-1}}{J} - \beta \right) \text{c} + \left(\frac{\rho \beta^{-2} + m_p L}{J} - \frac{\rho}{\beta^3 J_p} \right) \text{s} - \frac{\rho \beta L^3}{J^3} - \right. \\ \left. \frac{m_p L^2 \beta}{J} - \frac{J_p \beta}{J} + \beta \right)$$

$$F = \left(\left(\frac{-\rho L \beta^{-1} - J_p \beta}{J} + \beta \right) \text{sh} + \left(\frac{\rho \beta^{-2} - m_p L}{J} - \frac{\rho}{\beta^3 J_p} \right) \text{ch} + \right. \\ \left(\frac{\rho L \beta^{-1} - J_p \beta}{J} + \beta \right) \text{s} + \left(\frac{\rho \beta^{-2} + m_p L}{J} - \frac{\rho}{\beta^3 J_p} \right) \text{c} - \frac{2\rho \beta^{-2}}{J} \right)$$

$$G = \left(\left(\frac{-\rho L^2 \beta^{-1} - J_p L \beta}{J} + \frac{\rho}{\beta m_p} \right) \text{ch} + \left(\frac{\rho L \beta^{-2} - m_p L^2}{J} + 1 \right) \text{sh} + \right. \\ \left. \frac{\rho \beta L^4}{J^3} + \frac{m_p L^3 \beta}{J} + \frac{J_p L \beta}{J} - \beta L \right)$$

$$H = \left(\left(\frac{\rho L^2 \beta^{-1} - J_p L \beta}{J} - \frac{\rho}{\beta m_p} \right) \text{c} + \left(-\frac{\rho L \beta^{-2} - m_p L^2}{J} + 1 \right) \text{s} + \right. \\ \left. \frac{\rho \beta L^4}{J^3} + \frac{m_p L^3 \beta}{J} + \frac{J_p L \beta}{J} - \beta L \right)$$

$$I = \left(\left(\frac{\rho L^2 \beta^{-1} + J_p L \beta}{J} - \frac{\rho}{\beta m_p} \right) \text{sh} + \left(-\frac{\rho L \beta^{-2} + m_p L^2}{J} - 1 \right) \text{ch} - \right. \\ \left(\frac{\rho L \beta^{-2} + m_p L^2}{J} - 1 \right) \text{c} - \left(\frac{\rho L^2 \beta^{-1} - J_p L \beta}{J} - \frac{\rho}{\beta m_p} \right) \text{s} + \frac{2\rho L \beta^{-2}}{J} \right)$$

โดยที่ $\sin \beta L = s$, $\cos \beta L = c$, $\sinh \beta L = sh$, $\cosh \beta L = ch$
ค่า ω_i ที่ทำให้ (20) เป็นจริงคือค่าของความถี่ธรรมชาติ $w(t, x)$
สามารถเขียนเป็นผลรวมของ Eigenfunction $\psi_i(x)$ ได้เป็น

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \delta_i(t)$$

จาก (17) ใช้คุณสมบัติของ Orthonormality condition [9] จะได้

$$\rho \int_0^L \psi_r(x) \psi_s(x) dx + m_p \psi_r(L) \psi_s(L) \\ + J_p \frac{\partial \psi_r(L)}{\partial x} \frac{\partial \psi_s(L)}{\partial x} - \frac{\kappa_r \kappa_s}{J} = \Delta_{rs} \quad r, s = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

โดยที่ Δ_{rs} คือค่า Kronecker delta

$$\kappa_r = \rho \int_0^L x \psi_r(x) dx + m_p L \psi_r(L) + J_p \frac{\partial \psi_r(L)}{\partial x} \quad (22)$$

จากคุณสมบัติของ Orthonormality เราสามารถเขียนคุณสมบัติที่อยู่ในสภาพยึดหยุ่นได้ดังนี้

$$EI \int_0^L \frac{\partial^2 \psi_r(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_s(x)}{\partial x^2} dx = \Delta_{rs} k_{rr} \quad r, s = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

จาก (7) เราสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$T(t) - J \ddot{\theta}(t) - \sum_{r=1}^{\infty} \ddot{\delta}_r(t) \kappa_r = 0 \quad (24)$$

จะเห็นได้ว่าระบบเป็นอนันต์ (∞) ดังนั้นหลังจากเปลี่ยนให้เป็นระบบที่จำกัด (N) แล้ว จะสามารถเขียนสมการของพลังงานได้ดังนี้
พลังงานจลน์ที่เกิดขึ้นในระบบโดยพิจารณาจาก (21) เขียนได้เป็น

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \dot{\delta}_r(t) \dot{\delta}_s(t) m_{rs} \quad (25)$$

โดยที่ $m_{00} = J$, $m_{r0} = m_{0s} = \kappa_r$ และ

$$m_{rs} = \Delta_{rs} + \frac{\kappa_r \kappa_s}{J} \quad r, s = 1, 2, \dots, N$$

สำหรับพลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นเมื่อพิจารณา (23) และงานที่เกิดขึ้นจะสามารถเขียนได้เป็น

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N \delta_r(t) \delta_s(t) \Delta_{rs} k_{rr} \quad (26)$$

$$W = T(t) \sum_{r=0}^N \frac{\partial \psi_r(0)}{\partial x} \delta_r(t) \quad (27)$$

จาก (25) (26) และ (27) จะสามารถเขียนแบบจำลองได้เป็น

$$M \{\ddot{\delta}\} + K \{\delta\} = fT(t) \quad (28)$$

จาก (28)

$$M = \begin{bmatrix} J & \kappa_1 & \kappa_2 & \cdot & \kappa_N \\ \kappa_1 & m_{11} & \frac{\kappa_1 \kappa_2}{J} & \cdot & \frac{\kappa_1 \kappa_N}{J} \\ \kappa_2 & \frac{\kappa_2 \kappa_1}{J} & m_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\kappa_{N-1} \kappa_N}{J} \\ \kappa_N & \frac{\kappa_N \kappa_1}{J} & \cdot & \cdot & m_{NN} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & k_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & k_{NN} \end{bmatrix}$$

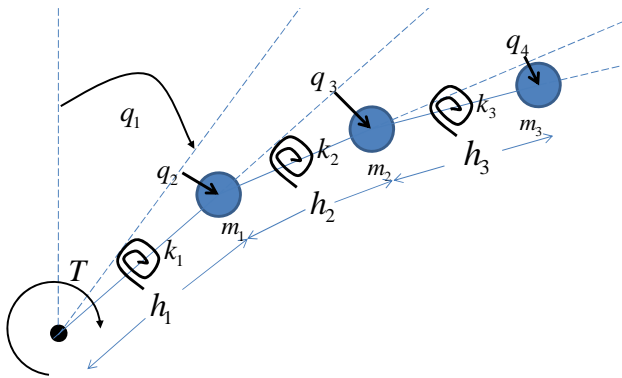
แบบจำลองปริภูมิสแตต สามารถเขียนได้เป็น

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}K & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ B^{-1}f \end{bmatrix} T(t) \quad (29)$$

สำหรับความสัมพันธ์ของมุมที่เปลี่ยนไปที่จุดใดๆ สามารถเขียนได้เป็น

$$\alpha(t, x) = \theta(t) + \frac{w(t, x)}{x} = \theta(t) + \sum_{r=0}^N \delta_r \frac{\psi_r(x)}{x}$$

4. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยวิธีการประมาณ



รูปที่ 5 พิจารณาแขนกลเป็นแบบ Lumped – parameter system

รูปที่ 5 เราจะแบ่งมวลของแขนกลแบบยึดหยุ่นในระบบออกเป็น ส่วนๆ (Lumped – parameter system) ทั้งหมดสามส่วนคือ m_1, m_2 และ m_3 เชื่อมกันด้วย Torsional spring แบ่งเป็นสามส่วนเช่นกันคือ k_1, k_2 และ k_3 เราจะสร้างระบบจากสมการ Lagrange โดยกำหนด Generalize coordinates ดังนี้ q_1 คือมุมที่แขนกลเปลี่ยนแปลงไป q_2, q_3 และ q_4 คือระยะของ m_1, m_2 และ m_3 ที่เปลี่ยนแปลงไป โดยมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันดังรูปที่ 5 พลังงานจลน์ที่เกิดขึ้นในระบบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$T = \frac{1}{2} m_1 (h_1 \dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 (2h_1 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + \frac{1}{2} m_3 (3h_1 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)^2 \quad (30)$$

พลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นในระบบสามารถเขียนได้เป็น

$$U = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{q_2}{h_1} \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{q_3}{h_2} \right)^2 + \frac{1}{2} k_3 \left(\frac{q_4}{h_3} \right)^2 \quad (31)$$

ส่วนงานที่กระทำต่อระบบคือแรงบิดของมอเตอร์สามารถเขียน ความสัมพันธ์ได้เป็น

$$dW_{mp} = Tdq_1 \quad (32)$$

จากสมการของ Lagrange คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (33)$$

จะสามารถเขียนได้เป็น

$$M \{\ddot{q}\} + K \{q\} = fT(t) \quad (34)$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1/h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2/h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3/h_3^2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f$$

$$\begin{bmatrix} (m_1 h_1^2 + 4m_2 h_1^2 + 9m_3 h_1^2) & (m_1 h_1 + 2m_2 h_1 + 3m_3 h_1) \\ (m_1 h_1 + 2m_2 h_1 + 3m_3 h_1) & (m_1 + m_2 + m_3) \\ (2m_2 h_1 + 3m_3 h_1) & (m_2 + m_3) \\ (3m_3 h_1) & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2m_2 h_1 + 3m_3 h_1) & (3m_2 h_1) \\ (m_2 + m_3) & m_3 \\ (m_2 + m_3) & m_3 \\ m_3 & m_3 \end{bmatrix} = M$$

สามารถเขียนในรูปปริภูมิเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M^{-1}][K] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [M^{-1}]f \end{bmatrix} T(t) \quad (35)$$

$$\text{โดยที่ } \dot{x}_1 = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix}, \quad \dot{x}_2 = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{Bmatrix}, \quad x_1 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}, \quad x_2 = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix}$$

สามารถเขียนเอาต์พุตของระบบได้ดังนี้

$$\alpha = q_1 + \frac{q_2}{h_1} + \frac{q_3}{h_2} + \frac{q_4}{h_3} \quad (36)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 & \dot{q}_4 \end{bmatrix}^T \quad (37)$$

จะเห็นว่าในระบบนี้ มีจำนวนองศาอิสระเท่ากับจำนวนของมวล ที่กำหนดขึ้น ดังนั้นความถี่ธรรมชาติจะมีทั้งหมดสามค่า

5. การทดลอง

รูปที่ 6 แสดงชุดทดลอง ขับด้วยมอเตอร์กระแสตรงมีอัตราการทด เป็น 64:1 วัดมุมด้วย Encoder ความละเอียด 360 เส้น ส่วนตำแหน่ง ณ จุดต่างๆ ของแขนกลถูกวัด Strain gauge มีทั้งหมดสามจุดตั้งรูป คุณสมบัติทางกายภาพของแขนกลเป็นดังนี้

E (Young modulus)	2.1×10^{11}	N/m ²
I (Area moment of inertia)	1.67×10^{-11}	m ⁴
L (Length)	0.54	m
J_0 (Inertia of rotor and hub)	1.755×10^{-4}	kg.m ²
ρ (Linear mass density)	0.25	kg/m
J_p (Inertia of the payload)	0.012	kg.m
m_p (Mass of the payload)	0.09917	kg

ในการทดลองเพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาตินั้นจะใช้อุปกรณ์ตรวจวัด ความเร่ง Sparkfun รุ่น SEN-00395 ใช้ Fast Fourier Transform ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติผลที่ออกมาเป็นดังรูปที่ 7 ซึ่งมีความเด่นชัด ทั้งหมดสามโหมด สำหรับสัญญาณที่ได้รับจาก Strain gauge เพื่อทำการวัดตำแหน่งนั้นสัญญาณมีค่าต่ำมากดังนั้นจึงมีการสร้างวงจร Amplifier จาก Op-amp เบอร์ CA 3140 สร้างเป็นวงจร Instrumentation amplifier



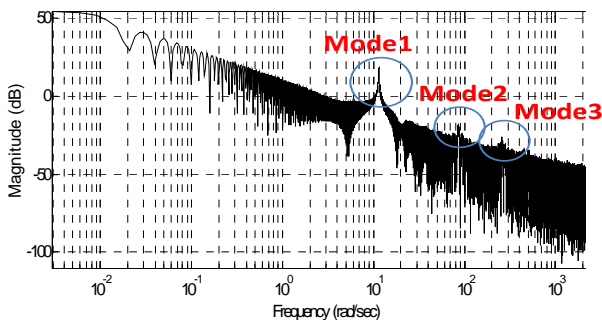
รูปที่ 6 ชุดทดลองแขนกลชนิดยืดหยุ่น

สำหรับแบบจำลองด้วยวิธีการประมาณ พารามิเตอร์จากชุดทดลองแขนกลเป็นดังนี้

$$h_1 = h_2 = 0.16 \text{ m}, \quad h_3 = 0.24 \text{ m}$$

$$k_1 = k_2 = 8.14 \text{ N.m/rad}, \quad k_3 = 3.99 \text{ N.m/rad}$$

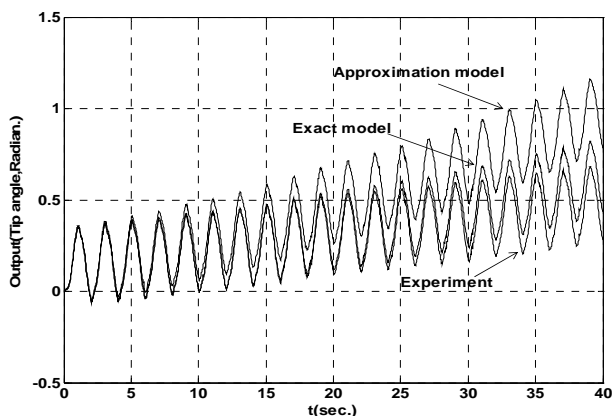
$$m_1 = m_2 = 0.03762 \text{ kg}, \quad m_3 = 0.09917 \text{ kg}$$



รูปที่ 7 ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการทดลอง

ตารางที่ 1 ความถี่ธรรมชาติของแขนกลชนิดยืดหยุ่น (Hz)

Natural modes	Exact model	Approximate model	Experiment
1	2.8	3.4	2.11
2	20.17	10.85	14.53
3	38.99	23.66	42.18



รูปที่ 8 ผลการทดลองเมื่อทำการเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองแบบแม่นยำ แบบจำลองโดยการประมาณและการทดลองจริง

จากผลการทดลองค่ามุมที่จุดปลายและค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้ตั้งตารางที่ 1 และจากรูปที่ 8 แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบแม่นยำของแขนกลชนิดยืดหยุ่นมีความแม่นยำมากกว่าแบบจำลองที่สร้างขึ้นจากวิธีการประมาณ เมื่อทำการเปรียบเทียบับผลการทดลองจริง

6. สรุป

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบแม่นยำเหมาะสำหรับนำไปใช้จำลองระบบที่มีความยืดหยุ่นตัวได้เป็นอย่างดี สาเหตุที่ทำให้ผลการทดลองของแบบจำลองมีความคลาดเคลื่อนนั้น ส่วนแรกเกิดจากการสร้างแบบจำลองซึ่งมีองศาอิสระเป็นอนันต์มาเป็นแบบจำกัด อีกส่วนหนึ่งมาจากการทดลองมีการใช้ Strain gauge มาเป็นตัวตรวจวัด ซึ่ง Strain gauge นั้นจะขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิและความชื้น ทำให้ผลจากการทดลองจริงมีความคลาดเคลื่อน

กิตติกรรมประกาศ

งานนี้ได้รับการสนับสนุนบางส่วนจากสถาบันค้นคว้าและพัฒนาเทคโนโลยีการผลิตทางอุตสาหกรรม แห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เอกสารอ้างอิง

- [1] Hastings, G.G., and Book, W.J., 1987. A linear dynamic model for flexible robotic manipulators. IEEE ,pp. 61-64.
- [2] Nagaraj, B.P., and Nataraju, B.S., 1997. Dynamics of two-link flexible system undergoing locking: mathematical modeling and comparison with experiment. Journal of sound and vibration, pp. 567-589.
- [3] Martin, J.M., Mohamed, Z., Tokhi, M.O., Costa, J.S., and Botto, M.A., 2003. Approaches for dynamic modeling of flexible manipulator systems. Control Theory, Vol. 150, No.4, pp.401-411.
- [4] Bellezza, F., Lanari, L., and Ulivi, G., 1990. Exact modeling of the flexible slewing link. IEEE, pp. 734-739.
- [5] Meirovitch, L., 2001. Fundamentals of vibrations. Mcgraw-hill, Singapore.
- [6] Wang, D., and Vidyasagar, M., 1989. Transfer functions for a single flexible link. IEEE, pp. 1042-1047.
- [7] Han, S.M., Benaroya, H., and Wei, T., 1999. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. Journal of sound and vibration, pp. 935-988.
- [8] จิตโกมุท สงศิริ, 2545, การทำให้เสถียรด้วยการป้อนกลับสำหรับแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว: แนวทางระบบมิตอนันต์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [9] White, M.W.D., and Hepler, G.R., " A Timoshenko model of a flexible slewing link" In Proceeding of The American Control Conference, Seattle, Washington, America, June 1995, pp.2815-2819.